

УДК 539.3

Г. Сулим¹, докт. фіз.-мат. наук; О. Кузь²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Національний університет "Львівська політехніка"

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ФОРМУВАННЯ З'ЄДНАННЯ ПРУЖНИХ АРМАТУРНИХ СТРИЖНІВ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЮ МУФТОЮ

Резюме. Розглянуто проблему формування з'єднання пружних арматурних стрижнів пружно-пластичною обтискною муфтою. Відповідна контактна задача деформаційної теорії пластичності за активного навантаження розв'язується варіаційно-різницевим методом. Отримані діаграми полів тензора напружень свідчать про ефективність такого способу з'єднання арматури.

Ключові слова: арматурний стрижень, обтискна муфта, контактна задача, деформаційна теорія пластичності, варіаційно-різницевий метод.

G. Sulym, O. Kuz'

NUMERICAL SOLVING OF CONTACT PROBLEM ABOUT FORMING OF CONNECTION OF ELASTIC ARMATURE BARS BY A CRIMP HOB

The summary. The problem of connection of armature bars by a crimp hob is considered. Putting of the contact problem of deformation plasticity theory is formulated. On the strength of variation difference method the diagrams of displacements and stresses are obtained.

Key words: armature bar, crimp hob, contact problem, deformation plasticity theory, variation difference method.

Постановка проблеми. Великогабаритні залізобетонні конструкції (прогонові балки, опори ліній передач тощо) потребують укріплення чи армування за допомогою дуже довгих арматурних стрижнів. Оскільки довжина арматури, яка виготовляється на металургійних підприємствах, не перевищує 12м, виникає проблема з'єднання таких стрижнів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним з найефективніших високотехнологічних методів з'єднання арматурних стрижнів є їх механічне з'єднання обтискною муфтою. У даній роботі за допомогою числового моделювання обґрунтовується технологія механічного з'єднання пружної арматури обтискною пружно-пластичною муфтою. Вона є анонсованим продовженням циклу робіт [1, 2], у яких арматура вважалася абсолютно жорсткою. У роботі [2] показано перевагу застосування пружно-пластичної муфти над пружною [1].

Мета роботи. Отримати розв'язок контактної задачі деформаційної теорії пластичності про формування з'єднання пружних арматурних стрижнів пружно-пластичною обтискною муфтою та дослідити поведінку цього з'єднання за розтягувального навантаження.

Постановка задачі. Розглядається контактна задача деформаційної теорії пластичності за активного навантаження про обтискання за допомогою рівномірно розподіленого навантаження P співвісних пружних арматурних стрижнів, що дотикаються торцем і охоплені пружно-пластичною циліндричною муфтою, які разом займають тривимірну область V , обмежену поверхнею Σ . Осьовий переріз цієї області

зображений на рис. 1. Оскільки кут нахилу виступів арматури до її осі може досягати 75° , для спрощення формулювання задачі припустимо, що виступи арматури розташовані суцільно вздовж кола в її кільцевому перерізі на певній відстані одне від одного. Це дасть можливість розв'язувати наведену вище задачу в осесиметричній постановці. Згідно з вимогами ДСТУ 3760:2006 виступи арматури в перерізі мають форму рівнобедрених трапецій з мінімальним кутом нахилу бічних граней до більшої основи 45° , тому для спрощення числової реалізації задачі виступи арматури в перерізі моделюються прямокутниками (рис. 1, 2). З математичного погляду задача полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги в області V

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + X_i = 0 \quad (1)$$

при використанні мішаних крайових умов на її поверхні $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j|_{\Sigma_\sigma} = S_i^0. \quad (2)$$

Тут C_{ijkl} – компоненти тензора C модулів пружності; u_i, X_i, S_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень, об'ємних та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ відповідно. За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до трьох.

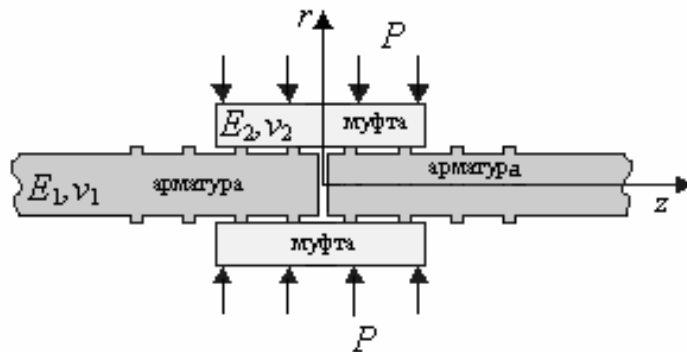


Рисунок 1. Пружна арматура, яка обтискається пружно-пластичною муфтою

У випадку ізотропного тіла компоненти тензора модулів пружності матимуть вигляд

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3)$$

де λ, μ – параметри Ляме, які виражаються через модуль поздовжньої пружності E і коефіцієнт Пуассона ν для арматури і муфти відповідно; δ_{ij} – компоненти одиничного тензора.

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу [3], потрібно в (1), (2) покласти

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)), \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3} \mu(\varepsilon_u), \quad (4)$$

де ε_u – інтенсивність тензора деформацій $\left(\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$; K – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_u)$ – функція пластичності Ільюшина.

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega(\varepsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1-\gamma) \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u}, & \varepsilon_u > \varepsilon_s; \\ 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_s, \end{cases}$$

де ε_s – межа течіння; $\gamma = \mu'/\mu$ (μ' – модуль зміщення).

Вздовж верхньої межі виступів арматури та муфтою виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$u_r^m = u_r^a, \quad \sigma_{rz}^m = \sigma_{rz}^a. \quad (5)$$

Інші частини арматури та муфти не контактують. Вважатимемо, що обтискання муфтою здійснюватиметься до тих пір, поки деформована поверхня муфти не торкнеться поверхні між виступами арматури.

Для числового розв'язування задачі (1), (2) зручно використовувати її варіаційну постановку [4], яка полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma_\sigma} S_i^0 u_i d\Sigma, \quad (6)$$

де $W = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\varepsilon_u) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ – питома енергія пружно-пластичної деформації.

Далі в (6) перейдемо до циліндричних координат z, r, φ :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Враховуючи симетричність області V і зовнішніх сил \vec{X}, \vec{S}^0 відносно осі Oz та площини $z=0$, достатньо обмежитися розглядом лише четвертини її осевого перерізу, наприклад, правої верхньої (див. рис. 2), в якій лагранжіан (6) набуде вигляду [5]

$$L_0 = \int_{V_0} r W(\vec{v}) dV + \int_{V_0} r X_i v_i dV - \int_{\Sigma_0} r S_i^0 v_i d\Sigma, \quad (7)$$

$$W(\vec{v}) = \frac{1}{2} \tilde{C}^{ijkl} \nabla_j v_i \nabla_l v_k,$$

де V_0 – двовимірний об'єм (область) (Σ_0 – одновимірний її межі), отримана перерізом області V площиною, яка проходить через вісь Oz (рис. 2). Тут $\vec{v}(v_1, v_2)$, $v_1 \equiv u_z(z, r)$, $v_2 \equiv u_r(z, r)$, $u_\varphi \equiv 0$; \tilde{C}^{ijkl} – компоненти тензора C у циліндричній системі координат; $\nabla_j v_i$ – коваріантні похідні компонент вектора переміщень v_i за відповідною координатою.

Замінивши в (7) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h .

Для визначення стаціонарної точки L_0^h у випадку деформаційної теорії пластичності отримаємо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{v}) + \vec{F} = 0,$$

які зручно розв'язувати ітераційним методом [6].

Описаний метод реалізований у вигляді пакета програм алгоритмічною мовою FORTRAN, який враховує різні крайові умови, параметри області та середовища.

Результати числових досліджень. Використовуючи викладений вище метод, розв'язано конкретний приклад осесиметричної контактної задачі про формування з'єднання пружних арматурних стрижнів пружно-пластичною муфтою. Стрижні виготовлені з арматурного прокату періодичного профілю класу А500С номінального

діаметра 18 мм, межа течіння $\sigma_y = 500$ МПа (згідно з вимогами ДСТУ 3760:2006), а муфта – із суцільного прокату сталі 20 зі $\sigma_y = 235$ МПа (матеріал з лінійним зміцненням). Відстань між виступами арматури вчетверо більша, ніж їх ширина (ДСТУ 3760:2006). Рівномірно розподілене навантаження P , яке прикладалося до муфти, дорівнювало 750 кН. На рис. 2 також відображені крайові та контактні умови. На ділянці контакту виступів арматури та муфти вимагалось виконання умов ідеального механічного контакту (5). Межі муфти та арматури, крайові умови на яких не вказані на рис. 2, вільні від навантажень.

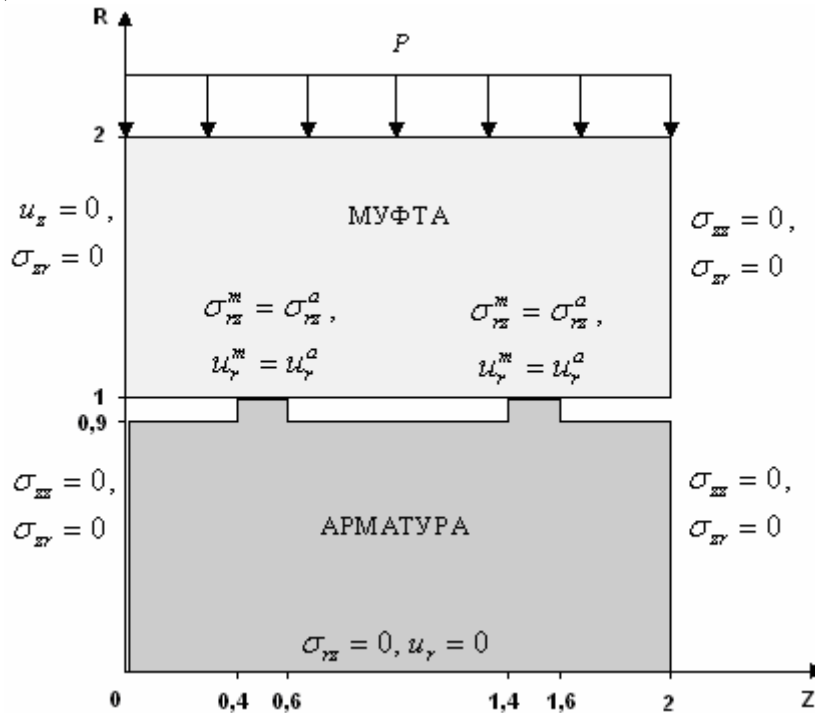


Рисунок 2. Розрахункова область із зазначеними крайовими та контактними умовами для задачі про обтиск пружно-пластичною муфтою пружних арматурних стрижнів

На рис. 3 наведена діаграма просторового розподілу в контактуючих тілах інтенсивності тензора напружень σ_{ii} внаслідок прикладання навантажень. Також на цьому рисунку показана зміна форми муфти за прикладеного зовнішнього тиску P .

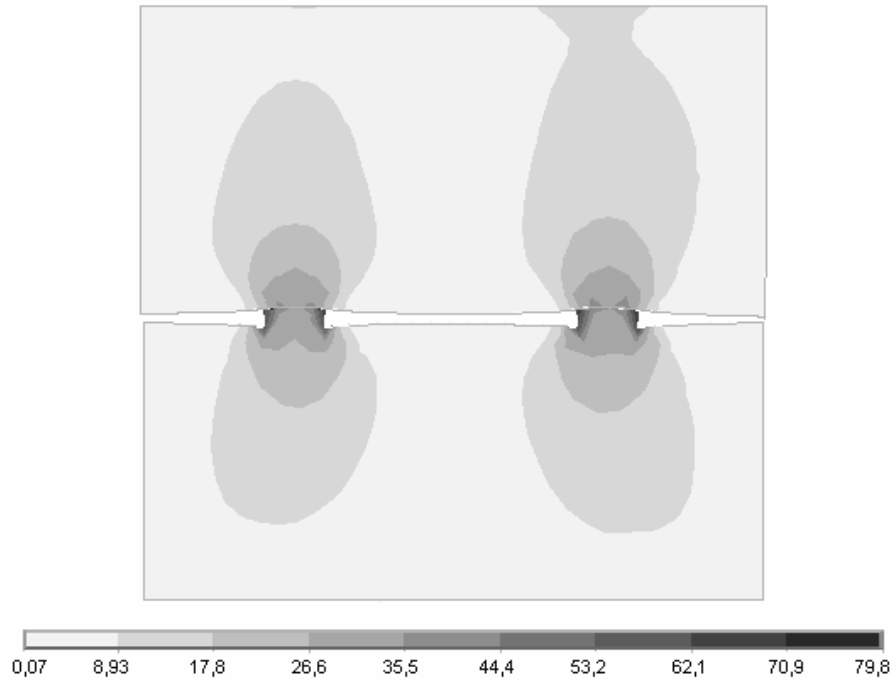
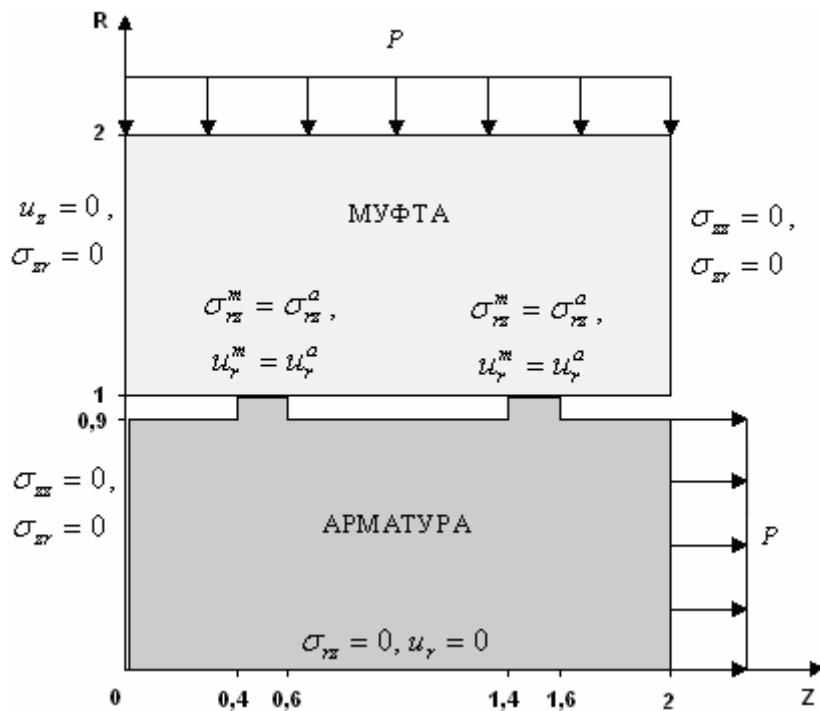


Рисунок 3. Діаграма просторового розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u в МПа для розрахункової області, яка зображена на рис. 2

За допомогою діаграм розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u можна встановити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовою текучості Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли інтенсивність тензора напружень σ_u сягає межі течіння σ_y .



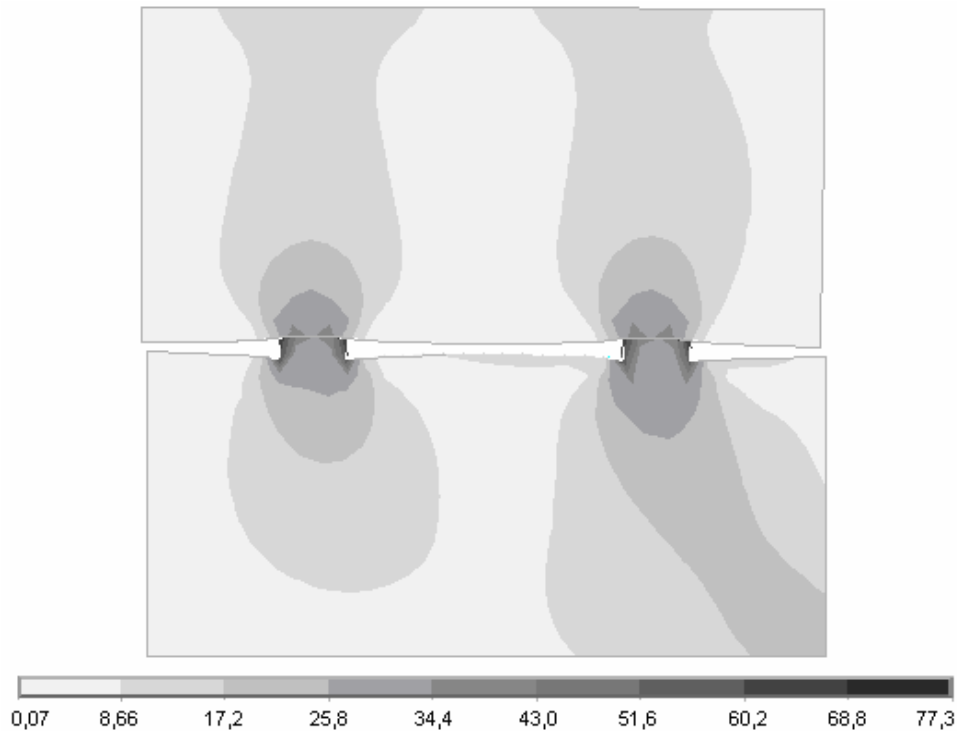


Рисунок 5. Діаграма просторового розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u в МПа для розрахункової області, яка зображена на рис. 4

Для аналізу міцності даного виду з'єднання до торців арматури прикладалося таке саме за величиною розтягувальне навантаження P (рис. 4). На рис. 5 зображена діаграма просторового розподілу інтенсивності тензора напружень для цієї задачі.

Висновки. Достовірність отриманих числових результатів підтверджується якісним збігом із результатами розв'язування задачі про тиск штампа на пружну півплощину. Числовий аналіз засвідчив, що найбільші за абсолютною величиною нормальні радіальні напруження σ_{rr} виникають на краях виступів арматури. Натомість, радіальні переміщення u_r , навпаки, найбільші на краях муфти. Зони пластичних деформацій вперше з'являються на лівому і правому краях виступів арматури і розповсюджуються назустріч одне одному вздовж виступу (рис. 3).

Порівнюючи рис. 3 і 5, бачимо, що інтенсивність тензора напружень σ_u практично не змінюється, що свідчить про достатню надійність такого способу з'єднання арматури.

Таким чином, отримані діаграми полів напружень дають можливість виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність з'єднання арматурних стрижнів обтискнуою муфтою.

Література

1. Сулим, Г.Т. Числове розв'язування осесиметричної задачі з'єднання арматурних стрижнів обтискнуою втулкою [Текст] / Г.Т. Сулим, Й.Й. Лучко, О.Н. Кузь // Дороги і мости. – Вип. 8. – К.: ДерждорНДІ, 2008. – С. 254–259.
2. Кузь, О.Н. Числове розв'язування осесиметричної задачі про з'єднання металевих арматурних стрижнів пружно-пластичною обтискнуою втулкою [Текст] / О.Н. Кузь, Й.Й. Лучко, Г.Т. Сулим // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. – Вип. 10. – Л.: Каменяр, 2008. – С. 70–75.
3. Ильющин, А.А. Пластичность [Текст] / А.А. Ильющин – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
4. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.

5. Шешенин, С.В. Применение вариационно-разностного метода к осесимметричным задачам теории упругости [Текст] / С.В. Шешенин, И.С. Кузь // Упругость и неупругость : Москва. – 1987. – С.39–44.
6. Шешенин, С.В. О прикладных итерационных методах [Текст] / С.В. Шешенин, И.С. Кузь // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – М., 1990. – Вып. 1. – С. 63–75.

Отримано 05.09.2011